Capítulo I

Expresiones algebraicas

Introducción

El gran aporte del álgebra es que nos permite describir de manera concisa y coherente relaciones generales facilitando su comprensión y estudio. Debido a esto, es una herramienta esencial para demostrar propiedades, describir patrones y resolver problemas. Al introducir el lenguaje algebraico pareciera que se agrega una complicación innecesaria, pero al desarrollar manejo algebraico nos damos cuenta de que el álgebra nos permite abordar de manera sencilla y sistemática problemas complejos. Para trabajar en álgebra, es necesario realizar una abstracción que nos libere de los contextos y casos particulares. Esto puede constituir una barrera. Para facilitar este tránsito entre lo concreto y lo abstracto, es necesario que el uso de símbolos y el trabajo algebraico tengan sentido, y dar significado a los procedimientos y razonamientos. Para esto usaremos diversas herramientas, como diagramas, modelos y también demostraciones.

Antiguamente, las fórmulas y propiedades se expresaban en lenguaje natural, como puede verse por ejemplo en el libro *al–Kitab almukhtasar fi hisab al–jabr wal–mukabal*, del matemático árabe Mohammed ibn Musa al–Khowarizmi (780–850 a.C.). En este libro se encuentra la siguiente fórmula:

La cosa y diez es multiplicado por la cosa menos diez, entonces esto es lo mismo que si se dijera la cosa multiplicada por la cosa, es un cuadrado positivo, y diez por la cosa es diez cosas positivas; menos diez por la cosa es diez cosas negativas, ahora restamos lo negativo de lo positivo, y solo queda un cuadrado. Menos diez multiplicado por diez es cien, que se debe sustraer del cuadrado. Por lo tanto, resulta un cuadrado menos cien.

Si expresamos la fórmula del texto usando lenguaje algebraico, donde la letra x representará “la cosa”, obtenemos:

$$(x + 10)\,(x - 10) = x \cdot x + 10x - 10x - 10 \cdot 10 = x^2 - 100.$$

La ventaja del lenguaje algebraico queda a la vista.

En la primera parte de este capítulo, aprenderemos a usar el lenguaje algebraico en distintos contextos: para describir propiedades generales, fórmulas, relaciones y regularidades. En la segunda parte, estudiaremos las potencias, sus propiedades y distintas aplicaciones.

1. Expresiones numéricas y algebraicas

El uso de símbolos (letras) nos permite expresar relaciones entre cantidades o magnitudes, de tal manera que en una sola expresión o *fórmula* podemos resumir muchos casos. Por ejemplo, podemos describir los números pares como aquellos que son el doble de un número natural. Esto se puede representar de manera algebraica con la expresión $2 \cdot n$, es decir 2 veces (o el doble de) un número natural n. Vemos que esta expresión es general, todos los números pares se escriben de esta forma. Así, $2 \cdot n$ *resume* la secuencia de pares: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,…

En geometría hay numerosos ejemplos de expresiones que involucran símbolos. Por ejemplo, el área de un rectángulo es su largo multiplicado por su ancho, lo cual se puede expresar como $A = l \cdot a$, donde A es el área del rectángulo, l es el largo y a es su ancho. Esta fórmula de área nos permite obtener el área de cualquier rectángulo, solo debemos conocer su largo y su ancho.

El lenguaje algebraico también nos permite expresar propiedades generales de los números y sus operaciones. Por ejemplo, la propiedad conmutativa de la suma la podemos expresar como sigue:

Para todos los números reales a y b, se cumple que $a + b = b + a$.

La frase anterior dice que cualesquiera sean los números a y b, siempre el resultado de la suma es el mismo, sin importar el orden en que se realice.

La clave en el uso de letras es que podemos representar con ellas un número cualquiera. Y así podemos plantear expresiones que pueden involucrar cantidades que desconocemos. Por ejemplo, analicemos el siguiente truco:

Piensa en un número, súmale 3, multiplícalo por 2, réstale 1, súmale 4, divídelo por 3 y réstale 4. ¡Seguro terminaste con el mismo número que pensaste!

La gracia del truco es que siempre funciona, independiente del número inicial escogido. Veamos por qué. Partimos por denotar como x el número pensado, el cual no conocemos:

Piensa en un número	x
Súmale 3	$x + 3$
Multiplícalo por 2	$(x + 3) \cdot 2 = x \cdot 2 + 3 \cdot 2 = x \cdot 2 + 6$
Réstale 1	$x \cdot 2 + 6 - 1 = x \cdot 2 + 5$
Súmale 5	$x \cdot 2 + 5 + 5 = x \cdot 2 + 10$
Divídelo por 2	$(x \cdot 2 + 10) : 2 = (x \cdot 2) : 2 + 10 : 2 = x + 5$
Réstale 5	$x + 5 - 5 = x$

Tabla I.1

Vemos que, luego de seguir los pasos del truco, el resultado es siempre el número pensado x. Probablemente algunos pasos del procedimiento no son del todo evidentes. Un diagrama puede ser muy útil para entender el truco y la validez de las expresiones que van describiendo la situación en cada paso.

Piensa en un número	?	x
Súmale 3	? 1 1 1	$x + 3$
Multiplícalo por 2	? 1 1 1 ? 1 1 1	$(x + 3) \cdot 2 = x \cdot 2 + 3 \cdot 2 = x \cdot 2 + 6$
Réstale 1	? 1 1 1 ? 1 1	$x \cdot 2 + 6 - 1 = x \cdot 2 + 5$
Súmale 5	? 1 1 1 1 1 ? 1 1 1 1 1	$x \cdot 2 + 5 + 5 = x \cdot 2 + 10$
Divídelo por 2	? 1 1 1 1 1	$(x \cdot 2 + 10) : 2 = (x \cdot 2) : 2 + 10 : 2 = x + 5$
Réstale 5	?	$x + 5 - 5 = x$

Tabla I.2

Vemos que usar la letra x en la descripción del truco no es esencial para comprenderlo, la clave fue ser capaces de representar el número desconocido. Como vemos en el ejemplo, usar la representación también nos ayuda a *traducir* el truco de manera algebraica y a comprender el sentido de x. Este tipo de representaciones son de gran utilidad al trabajar en álgebra, pero tienen algunas limitaciones. Por ejemplo, a través del razonamiento algebraico vemos que el truco siempre funciona, aunque el número pensado sea negativo, pero la representación utilizada para el número (como una barra de largo desconocido) no es adecuada. Otra limitación surge si los números involucrados en el problema son muy grandes (por ejemplo, si debemos multiplicar una cantidad desconocida por 12 y luego sumarle 30), en ese caso, la representación no es práctica. En la medida que se complejizan los problemas, se hace más evidente la utilidad del álgebra.

Como muestra el ejemplo, mediante un razonamiento algebraico pudimos probar la validez de la propiedad establecida en este truco. Para hacer este razonamiento tuvimos que: describir el problema de manera algebraica, mediante expresiones con símbolos; transformar estas expresiones (por ejemplo, cuando escribimos $(x + 3) \cdot 2 = x \cdot 2 + 3 \cdot 2 = x \cdot 2 + 6$ debido a la propiedad distributiva), e interpretar los resultados obtenidos. Estos tres pasos están presentes cuando se desea usar un razonamiento algebraico en diversas situaciones, como al resolver un problema con una cantidad desconocida o al justificar una propiedad.

Una de las complicaciones que tiene describir relaciones o propiedades de manera algebraica son las ambigüedades del lenguaje natural. En el ejemplo anterior, vemos que fue muy importante el uso correcto de paréntesis para expresar la situación descrita. En el lenguaje natural no se usan paréntesis y esto puede llevar a ambigüedades al escribir expresiones algebraicas. Por ejemplo, para representar algebraicamente el enunciado "el triple de, un número cualquiera más dos" la expresión es $3 \cdot (x + 2)$. Sin embargo, si no nos fijamos en la *coma* que separa las dos partes de la frase, podemos pensar que la expresión algebraica es $3 \cdot x + 2$; es decir, "el triple de un número cualquiera, más dos", que es distinta de la anterior, pues $3 \cdot (x + 2) = 3 \cdot x + 6$. Es evidente que podrían darse ambigüedades, sobre todo al escuchar este enunciado, ya que en el lenguaje oral las *comas* no siempre se aprecian con claridad. Por ello, para usar paréntesis de manera apropiada al traducir del lenguaje natural al lenguaje algebraico, se requiere de una lectura extremadamente cuidadosa.

Para pensar

Para expresar un número impar, Juan propone la expresión $2n + 1$, mientras que Sandra propone $2n - 1$. ¿Son correctas ambas expresiones?

Ejercicio

1. Explique mediante un razonamiento algebraico y con diagramas:
   a. ¿Por qué si se suma un número par y un número impar, el resultado es siempre impar?
   b. ¿Por qué si se suman dos múltiplos de tres, el resultado es múltiplo de tres?
   c. ¿Por qué si se suman tres números consecutivos, el resultado es siempre divisible por tres?

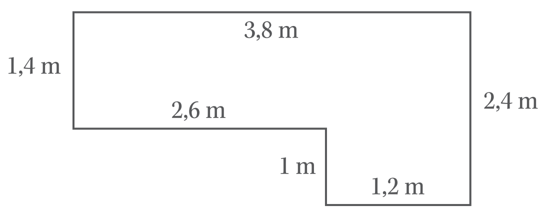
1.1 Expresiones numéricas

Desde pequeños, los niños se familiarizan con expresiones numéricas tales como $3 + 4$, $2 \cdot 3$, $24 : 8$. Estas nos acompañan toda la vida y muchas veces surgen al expresar las relaciones entre los datos de un problema. Por ejemplo, para calcular el precio de una compra que consiste en 3 kilos de papas y 1 litro de aceite, sabiendo que el kilo de papas cuesta \$659 y que el litro de aceite cuesta \$1.459, escribimos:

$$3 \cdot 659 + 1.459.$$

Ejemplos:

1) Se quiere cambiar el piso de una cocina, para lo cual hay que calcular su área. La superficie tiene forma de L, y las medidas se indican en la figura:



Al dividir la figura en dos rectángulos, podemos encontrar el área que buscamos por medio de la siguiente expresión:

$$1{,}4 \cdot 2{,}6 + 2{,}4 \cdot 1{,}2.$$

2) Daniel tenía 4 veces la cantidad de bolitas que tiene José, y luego le regalaron 5. Si José tiene 12 bolitas, ¿cuántas bolitas tiene ahora Daniel? La expresión que permite responder la pregunta es:

$$4 \cdot 12 + 5.$$

El uso de expresiones numéricas para describir situaciones cotidianas es un paso previo al trabajo con expresiones algebraicas. Si en el ejemplo anterior variamos la cantidad de bolitas que tiene José, suponiendo que tiene 13 en vez de 12, entonces la expresión numérica que describe el número de bolitas de Daniel es $4 \cdot 13 + 5$. En la siguiente tabla, podemos ver las distintas expresiones numéricas para la cantidad de bolitas de Daniel, al variar el número de bolitas de José en un cierto rango, suponiendo siempre que se cumple la relación: *Daniel tenía 4 veces el número de bolitas que tiene José, y luego le regalaron 5:*

Número de bolitas de José	Número de bolitas de Daniel
12	$4 \cdot 12 + 5$
13	$4 \cdot 13 + 5$
14	$4 \cdot 14 + 5$
15	$4 \cdot 15 + 5$
16	$4 \cdot 16 + 5$
17	$4 \cdot 17 + 5$

Tabla I.3

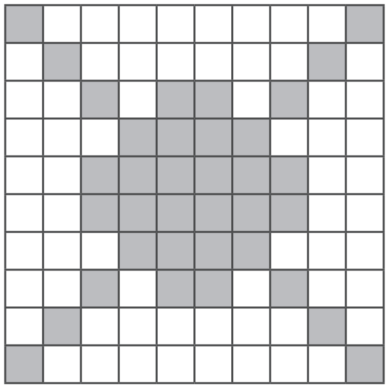
La expresión numérica describe la relación entre las bolitas de Daniel y José, y si no conocemos el número de bolitas que tiene José, de todas maneras, podemos proponer una expresión para la cantidad de bolitas que tiene Daniel, usando esta relación:

$$\text{número de bolitas de Daniel} = 4 \cdot j + 5,$$

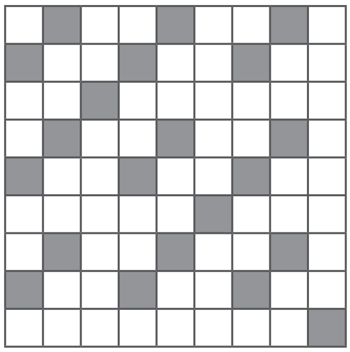
donde j es el número de bolitas de José.

Ejercicios

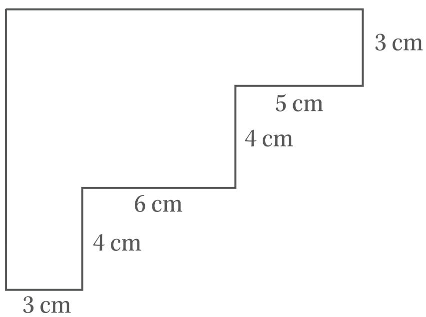
1. Escriba al menos 5 expresiones numéricas que le permitan calcular el área sombreada, suponiendo que el lado de cada cuadrado mide 1 cm.



2. Escriba al menos 5 expresiones numéricas que entreguen el número de cuadros blancos de la figura.



3. Escriba 4 expresiones numéricas distintas para el área de la siguiente figura:



4. Plantee problemas donde las relaciones entre los datos estén dadas por las siguientes expresiones:

   a. $(27 - 5 \cdot 3)/4$

   b. $187 + 12 \cdot 187$

   c. $2 \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot 5 - \frac{1}{2} \right)$

1.2 Distintos usos de las expresiones algebraicas

Definición I.1 Una expresión algebraica es una secuencia de números y letras unidos mediante operaciones matemáticas.

Las letras en las expresiones algebraicas se denominan *variables* y siempre representan números. Por ejemplo, $x + y$ es una expresión algebraica que representa la suma de los números x e y. El tipo de número que representa una variable depende del contexto. Por ejemplo, si x e y representan la cantidad de habitantes de dos ciudades, entonces deberían ser números naturales; mientras que en otro problema podrían decirnos que x e y representan longitudes, por lo que deberían ser números reales positivos. También la naturaleza de la expresión puede poner restricciones a los valores que toman las variables. Por ejemplo, $\frac{1}{x}$ es una expresión algebraica que expresa 1 dividido por x o el inverso multiplicativo de x, en este caso x no puede ser 0.

El significado de las expresiones algebraicas puede no ser evidente; por ejemplo, ¿qué significa $x + y$ si no conocemos x ni tampoco y? Para comprender esta expresión, no debemos olvidar que representa un número, el cual podemos determinar si conocemos el valor de x y el valor de y.

Las letras que usamos en las expresiones algebraicas son arbitrarias y no importa qué letras usemos, siempre que seamos consistentes. Por ejemplo, la fórmula del área del rectángulo es el producto de las medidas de ambos lados. Si anotamos la medida del largo como l y del ancho como a, entonces el área será $a \cdot l$. Pero si denotamos x la medida del largo e y la medida del ancho, tendremos que el área será $x \cdot y$.

Habitualmente, usamos la letra x para representar una cantidad desconocida cuyo valor queremos determinar como solución a un problema, por ejemplo, cuando resolvemos una ecuación. Pero hay situaciones donde se necesita determinar dos cantidades desconocidas y no podemos usar la misma letra para representar números que podrían ser distintos. Por ejemplo, podríamos querer buscar todas las medidas para el ancho y el largo de un rectángulo de área $16\ \text{cm}^2$. Es decir, buscamos valores de x e y que satisfagan $x \cdot y = 16$. Es claro que hay infinitas parejas de valores de x e y que resuelvan nuestro problema. Pero si hubiésemos usado la misma letra x para denotar ambas cantidades (largo y ancho), lo cual es incorrecto, pues ambas cantidades pueden ser distintas, encontraríamos que solo el rectángulo cuyos lados miden ambos 4 cm tiene área $x \cdot x = 16$. Así, encontraríamos una sola solución, lo cual no es correcto.

Al trabajar con expresiones algebraicas usaremos algunas convenciones. Al escribir multiplicaciones usaremos el punto $(\cdot)$ en lugar del signo $(\times)$, esto para no confundir expresiones como 2×3 con $2\,x\,3$. Más aún, para denotar *dos veces x o el doble de x* se utilizará indistintamente $2 \cdot x$ o $2x$, sin embargo, no podemos omitir el signo $(\cdot)$ cuando aparezcan multiplicaciones con números. Observamos que el orden en que se multiplican x y 2 no importa, debido a que la multiplicación es conmutativa, es decir, $x \cdot 2$ es lo mismo que $2 \cdot x$ (o $2x$). Por convención, en una multiplicación anotaremos primero los números y luego las letras, así, en este caso, lo usual es usar $2x$. También omitiremos el signo *por* ($\times$ o $\cdot$) cuando hay paréntesis en las expresiones. Así, $2\,(x + y)$ denota $2 \cdot (x + y)$. Es importante señalar que esto es solo una convención de escritura y no es incorrecto no usarla.

Definición I.2 Evaluar una expresión algebraica significa dar un valor numérico a las variables que en ella aparecen.

Por ejemplo, al evaluar la expresión $2a - \frac{2}{a}$ en $a = 2$, obtenemos $2 \cdot 2 - \frac{2}{2} = 3$. Observamos que debemos remplazar el valor 2 cada vez que aparece a en la expresión.

Al evaluar expresiones que involucran más de una variable, los valores considerados pueden ser iguales o distintos. Por ejemplo, podemos evaluar la expresión $4xy + x$ en $x = 1$ e $y = 1$, y obteniendo $4 \cdot 1 \cdot 1 + 1 = 5$, pero también la podemos evaluar en $x = 5$ e $y = -3$, lo que entrega:

$$4 \cdot 5\,(-3) + 5 = -60 + 5 = -55.$$

No siempre es posible evaluar una expresión algebraica en cualquier valor; por ejemplo, la expresión algebraica

$$\frac{3 - xy}{x - y},$$

no se puede evaluar cuando $x = y$, ya que para poder evaluarla, el denominador de la expresión debe ser un número distinto de 0. Por lo tanto, los valores numéricos asignados a x e y deben ser distintos.

Evaluar es esencial al trabajar con expresiones algebraicas. Muchas expresiones surgen de problemas concretos para describir relaciones entre cantidades desconocidas, y al evaluar estamos entregando un valor determinado a esas cantidades. También, al evaluar expresiones se pone de manifiesto que las variables siempre representan números.

Evaluar una expresión también nos ayuda a entender la validez de propiedades algebraicas y por qué un cierto resultado puede ser incorrecto. Por ejemplo, evaluar en distintos valores de x nos ayuda a comprender por qué $x + 2x + 1 = 3x + 1$, o por qué $x + 2x + 1$ no es igual a $4x$.

Ejercicios

1. Exprese los siguientes enunciados utilizando expresiones algebraicas:
   a. La cuarta parte de un número.
   b. El doble del doble de un número.
   c. Un múltiplo de 11.
   d. La suma de tres números naturales consecutivos.
   e. El triple de un número, menos la quinta parte de él.
   f. El producto entre dos números impares consecutivos.
   g. La suma de tres números pares consecutivos.
   h. La diferencia de dos números impares.
   i. El producto entre un número natural y el sucesor de él.

   Evalúe cada una de estas expresiones en 3, 5, 7, 9, para verificar que sus expresiones son válidas, y use un diagrama apropiado para explicar su expresión.

2. Exprese en lenguaje natural las siguientes expresiones:

a. $2a - 2$
b. $3(x + 4)$
c. $b + \frac{1}{2} - 2$
d. $(a + 2b)$
e. $(m + 1)(m + 2)$

3. En cada uno de los siguientes enunciados, escriba al menos dos expresiones que pueden representarlo y fundamente si dichas expresiones son iguales o no. En cada caso, explicite la relación entre la frase, el uso de paréntesis y la expresión resultante.

a. El doble de un número, menos su quinta parte.
b. Un número menos su mitad más su doble.

4. Al evaluar la expresión $\frac{3x}{x+5} \cdot 5$ en $x = 4$, un alumno obtuvo 3. ¿Qué posible error pudo cometer el alumno? ¿Cómo explicaría que el resultado obtenido es incorrecto?

En geometría aparecen numerosas expresiones algebraicas, debido a que ellas nos permiten expresar propiedades y fórmulas generales. Por ejemplo, el Teorema de Pitágoras se expresa como:

> *En un triángulo rectángulo de catetos con longitud* a *y* b *e hipotenusa con longitud* c, se *tiene que* $a^2 + b^2 = c^2$.

Las expresiones algebraicas también nos permiten describir o modelar situaciones que provienen de distintos contextos, por ejemplo: "la edad de Isabel hace tres años" se puede representar mediante la expresión $i - 3$, donde i representa la edad de Isabel. Veamos otro ejemplo.

Ejemplo

Antonia tenía inicialmente L lápices, de los cuales c eran de cera y el resto de palo. Ella pierde 1/3 de sus lápices de cera, 1/4 de sus lápices de palo y luego le regalan una caja de 20 lápices de cera. ¿Cuántos lápices tiene ahora Antonia?

Para encontrar el número de lápices que tiene Antonia, primero notamos que ella inicialmente tiene $L–c$ lápices de palo. Ella pierde $\frac{1}{3}c$ lápices de cera y $\frac{1}{4}\left(L - c\right)$ lápices de palo, por lo que le quedan $\frac{2}{3}c$ lápices de cera y $\frac{3}{4}\left(L - c\right)$ lápices de palo.

Como le regalan 20 lápices de palo, ella tiene un número total de lápices dado por $\frac{2}{3}c + \frac{3}{4}(L - c) + 20$.

Este ejemplo también nos ayuda a comprender la necesidad de usar distintas letras para distintas variables y que tenemos libertad de decidir cuáles variables identificaremos. En el problema del ejemplo, se habla de la cantidad de lápices, de la cantidad de lápices de cera y de la cantidad de lápices de palo. Tal como identificamos las dos primeras cantidades con las letras L y c, podríamos haber identificado también la cantidad de lápices de palo con la letra p y escribir la relación que cumplen estas cantidades, así: $L = c + p$. Dado que siempre se puede determinar p si se conoce L y c, omitimos asignar una nueva variable p al número de lápices de palo y usamos directamente que el número de estos lápices es $L - c$.

Ejercicios

1. Resuelva el problema del ejemplo anterior, usando como variables la cantidad de lápices de cera y la cantidad de lápices de palo.

2. Encuentre expresiones algebraicas para describir las siguientes situaciones:
   a. La edad de Juan en 5 años más.
   b. n filas de 6 sillas cada una.
   c. 54 personas repartidas equitativamente en n buses.
   d. La edad de Pedro más 7 veces la de Agustín.

3. Explique cómo usar expresiones algebraicas para describir las siguientes situaciones:
   a. En un colegio, por cada profesor o profesora hay b alumnos, ¿cuál es el número total de alumnos en el colegio?
   b. Marcela anda en bicicleta todos los días, ella siempre anda 1 km más que Susana. Entre las dos ¿qué distancia recorren en 1 mes?
   c. Juan leyó un libro. Él leía cada día la misma cantidad de páginas y lo terminó en d días. ¿Cuántas páginas diarias leía Juan?

4. Para cada una de las siguientes expresiones algebraicas, escriba un problema con contexto tal que su respuesta se exprese con dicha expresión:
   a. El 55% de a
   b. $4x + 2$
   c. $\sqrt{a^2 + 1}$
   d. $(i + 5) - 100$
   e. $0{,}125b + 3$
   f. $(a - 1) / b$

5. Explique cómo deducir una fórmula para el área de un trapecio a partir del área de un paralelogramo.

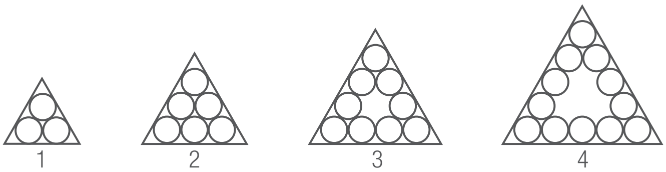
6. Para cada una de las siguientes expresiones, escriba una situación que pueda ser descrita por ella. Luego, evalúe cada expresión en $a = 36$, en el contexto de la situación propuesta. Asegúrese de que su situación tenga sentido para este valor de a.
   a. $a - 6$
   b. $5 + a$
   c. $a : 4$
   d. $100 - a$
   e. $5a$
   f. $\sqrt{a}$
   g. $2a - 2$

7. A partir de la fórmula para el área de un triángulo de base b y altura h, encuentre una fórmula para calcular el área de todos los triángulos de altura 5.

Las expresiones algebraicas también permiten expresar regularidades o patrones. Este uso, en el que una expresión surge a partir de casos particulares para expresar una regla general, ayuda a dar sentido y a motivar el trabajo con las expresiones algebraicas, enfatizando que nos permiten generalizar.

Ejemplo:

A continuación, se muestran los primeros cuatro términos de una secuencia de figuras formadas por círculos, que se ordenan como triángulos equiláteros.



Si la secuencia se continúa siguiendo este mismo patrón, ¿cuántos círculos se necesitan para formar el triángulo número 10? ¿Cuántos para el número 154? y ¿cuántos para el n-ésimo triángulo?

Para dar respuesta a las preguntas, debemos describir la regularidad o patrón, tal como se expresa en el problema, debemos suponer que la regla de formación de los triángulos se mantiene. En este caso, observamos que al pasar de un triángulo al siguiente debemos agregar un círculo a cada lado del triángulo, y suponemos que los siguientes triángulos se construyen de la misma manera. En la siguiente tabla, anotamos el número de círculos usados siguiendo esta regla:

N° del triángulo	N° de círculos en el triángulo
1	3
2	3 + 3 = 6
3	3 + 3 + 3 = 9
4	3 + 3 + 3 + 3 = 12

Así, el triángulo 10 tiene $3 \cdot 10 = 30$ círculos, el número 154 tendrá $3 \cdot 154 = 462$ círculos, y el triángulo n – ésimo (número n) tendrá $3 \cdot n$ triángulos.

En este ejemplo, la clave fue expresar la regla de formación del patrón. Esto se hizo primero a través de expresiones numéricas para distintos casos, a partir de las cuales se llega a una expresión algebraica que generaliza los casos anteriores.

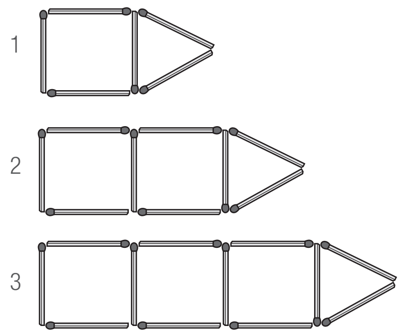
Es importante notar que una misma expresión algebraica puede aparecer en distintas fórmulas. Su sentido dependerá del contexto. Por ejemplo, la expresión $4a$ puede expresar el perímetro de un cuadrado de lado a, o puede ser el área de un triángulo de base a y altura 8, o bien puede ser el precio de cuatro dulces de valor a pesos cada uno.

En resumen

- El uso del lenguaje algebraico nos facilita describir situaciones sin las ambigüedades del lenguaje natural.
- La propiedad fundamental de las expresiones algebraicas es que nos permiten generalizar. Así, mediante ellas podemos:
  – expresar fórmulas
  – describir propiedades
  – describir situaciones provenientes de distintos contextos
  – expresar regularidades.
- Las letras o variables siempre representan números.
- Las variables pueden ser denotadas por distintas letras, sin que cambie su significado.
- Evaluar una expresión es dar valor a sus variables. Evaluar nos ayuda a entender la validez de propiedades y de manipulaciones algebraicas.
- El uso de las expresiones algebraicas para describir situaciones provenientes de diversos contextos nos ayuda a dar sentido al estudio de estas.

Ejercicios

1. Considere la secuencia de figuras formadas por palitos de fósforo, tal como se muestra en la figura:



Si se continúa la misma secuencia de ir agregando cuadrados, a la izquierda de la figura anterior, ¿cuántos palitos de fósforos se usarían en la figura 10? ¿Cuántos para la figura 74? ¿Cuántos para la figura n? Explique cómo se expresa la regla de formación de este patrón, haciendo referencia al paso desde la expresión numérica a la expresión algebraica.

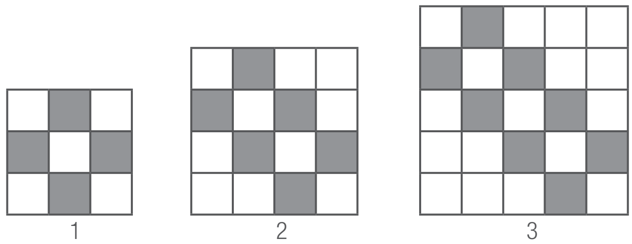
2. En el problema anterior, dos personas escribieron las siguientes respuestas para determinar la cantidad de palitos que tiene la figura n:

Respuesta 1: $4 + 3(n - 1) + 2$

Respuesta 2: $n + n + (n + 1) + 2$

¿Cuáles cree usted que fueron los razonamientos utilizados para llegar a dichas expresiones?

3. Considere la siguiente secuencia de baldosas cuadradas que se muestra en la figura:



Describa cómo continuar la secuencia siguiendo el mismo patrón. Según su descripción, determine: ¿cuántos cuadrados coloreados negros tiene la baldosa 10? ¿Cuántos cuadrados blancos tiene la baldosa 10? ¿Cuántos cuadrados negros y cuadrados blancos tiene la figura n? Explique cómo se expresa la regla de formación de este patrón, haciendo referencia al paso desde la expresión numérica a la expresión algebraica.

4. Proponga dos secuencias de figuras cuyo término n involucre las expresiones $(n + 2) + 1$ y $2\,(n - 1)$, respectivamente.

Al trabajar con expresiones algebraicas, siempre debemos tener presente que las variables representan números y, por lo tanto, las propiedades de las operaciones, tales como la conmutatividad, asociatividad y distributividad, son válidas. Dada la importancia de estas propiedades, las volveremos a enunciar y veremos cómo se deducen otras propiedades conocidas a partir de ellas.

1.3 Propiedades de las operaciones

Sean x, y, z números reales, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- Conmutatividad de la adición: $x + y = y + x$.
- Asociatividad de la adición: $x + (y + z) = (x + y) + z$.
- Elemento neutro de la adición: $x + 0 = x$.
- Inverso aditivo de la adición: para cada número existe un número que denotaremos $-x$, tal que $x + (-x) = 0$.
- Conmutatividad de la multiplicación: $xy = yx$.
- Asociatividad de la multiplicación: $x\,(yz) = (xy)\,z$.
- Elemento neutro de la multiplicación: $1 \cdot x = x$.
- Inverso multiplicativo: para cada número x distinto de cero, existe un número que denotamos por x^{-1} o $\frac{1}{x}$, tal que $xx^{-1} = 1$.
- Distributividad de la multiplicación respecto a la suma: $x\,(y+z) = xy + xz$.

La propiedad asociativa de la adición dice que no necesitamos usar paréntesis para sumar tres números, ya que podemos sumarlos en cualquier orden. Así, sin lugar a confusión, podemos escribir $(x + y) + z$ o $x + (y + z)$, como $x + y + z$. Análogamente, la propiedad asociativa de la multiplicación permite escribir$(xy)\,z$ o $x\,(yz)$, como xyz.

Ejemplo

Verifiquemos que $15x\,(3 + y) = 45x + 15xy$. Primero, usando la propiedad distributiva, tenemos que $15x\,(3 + y) = (15x)\,3 + (15x)\,y$; luego, por la propiedad conmutativa de la multiplicación, tenemos que $(15x)\,3 + (15x)\,y = 3\,(15x) + (15x)y$, y por la propiedad asociativa de la multiplicación, tenemos que $3\,(15x) + (15x)\,y = 45x + 15xy$; así, $15x\,(3 + y) = 45x + 15xy$.

A partir de las propiedades mencionadas arriba, se pueden deducir otras, por ejemplo:

Para todo número real x, $x \cdot 0 = 0$.

Esta propiedad se conoce como la *propiedad absorbente* del 0. La podemos deducir a partir de las propiedades de las operaciones enunciadas anteriormente, las cuales sabemos que son ciertas. Llamaremos *teorema* a una propiedad que se puede demostrar a partir de propiedades ya conocidas.

Teorema I.1

Para todo número real x, $x \cdot 0 = 0$.

Demostración

Sabemos que $0 + 0 = 0$. Si multiplicamos esta igualdad por un número real x, obtenemos que $x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0$, y usando la propiedad distributiva, se tiene que $x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot 0$.

Finalmente sumando a ambos lados el inverso aditivo de $(x \cdot 0)$, se tiene

$-(x \cdot 0)+ x \cdot 0 + x \cdot 0=-(x \cdot 0) + x \cdot 0$.

Usando la propiedad asociativa obtenemos que $[-(x \cdot 0) + x \cdot 0] + x \cdot 0 = [-(x \cdot 0) + x \cdot 0]$,

y aplicando propiedad del inverso aditivo obtenemos finalmente que $x \cdot 0 = 0$.

Ejercicio

Indique qué propiedades se están utilizando para obtener las siguientes igualdades:

a. $4\,(x + 2y) = 4x + 8y$

b. $\dfrac{x+z}{4} + \dfrac{x}{12} = \dfrac{x}{3} + \dfrac{z}{4}$

c. $(3x)\,(5y) = 15xy$

d. $0xy = 0$

e. $-\,(15xy) = -\,15xy$

f. $(15x^2)\,z + zy = z\,(15x^2 + y)$

La regla de los signos

La propiedad distributiva es clave para entender la denominada *regla de los signos*, resumida en el *dictum* “menos por menos da más”, que memorizamos desde niños y que muchas veces no comprendemos cabalmente, porque nos resulta contraintuitiva.

A menudo, esta regla se explica usando metáforas o analogías que incluyen enemigos, amigos, enemigos de los enemigos, etc. Lo cierto es que operar con números negativos no es un problema trivial: los más grandes matemáticos de occidente tuvieron serias dificultades con esto durante 400 años. No fue sino hasta comienzos del siglo XIX que la regla de los signos fue plenamente aceptada para los números, si bien ya se usaba libremente para expresiones algebraicas. Existían hasta ese momento dos operatorias: una para los números, sin la regla de los signos; y otra para las letras, en donde sí valía la regla. Esta dificultad se debió, probablemente, al profundo arraigo entre los matemáticos de la idea del número como magnitud geométrica, de modo que tenía poco sentido considerar números negativos, ya que no hay magnitudes geométricas negativas. Los números negativos aparecieron en la India, probablemente en el contexto del comercio, donde hay haberes y deudas. Como dijimos, su adopción en occidente fue difícil. Lo cierto es que la regla de los signos es el resultado necesario de exigir que las operaciones con números negativos verifiquen las mismas reglas que las operaciones con números positivos.

La regla de los signos se expresa en el siguiente teorema, el cual demostraremos a partir de las propiedades de las operaciones. Esta demostración nos da razones de por qué la regla es correcta, lo que nos ayuda a entenderla.

Teorema I.2

La regla de los signos.

Si a y b son números reales, entonces $(-a)(-b) = ab$ y $(-a)\,b = -(ab)$.

Demostración

Si a y b son dos números reales, por la propiedad distributiva se tiene que

$$(-a)(-b) + (-a)\,b = (-a)(-b+b),$$

usando la propiedad del inverso aditivo obtenemos $-b + b = 0$, por lo que

$$(-a)(-b) + (-a)\,b = (-a)(0),$$

y usando la propiedad absorbente del 0, tenemos que $(-a)(-b) + (-a)\,b = 0$.

Por otra parte, usando la propiedad distributiva tenemos que $ab + (-a)\,b = (a + (-a))\,b$, y usando la propiedad del inverso aditivo y la propiedad absorbente del 0 tenemos que

$$ab + (-a)\,b = (a + (-a))\,b = 0b = 0.$$

Ahora, tenemos que $ab + (-a)\,b = 0$ y $(-a)(-b) + (-a)\,b = 0$, es decir, ambas expresiones son iguales a cero y, por lo tanto, son iguales entre sí. Así,

$$(-a)(-b) + (-a)\,b = ab + (-a)\,b$$

y si sumamos a ambos lados de la igualdad $-(-a)\,b$, la igualdad se mantiene y obtenemos

$$(-a)(-b) = ab.$$

Dejamos como ejercicio al lector probar que $(-a)\,b = -(ab)$.

Vemos que para demostrar la regla de los signos solo hemos usado las propiedades de las operaciones. Así, la regla de los signos es cierta independientemente de nuestras intuiciones.